



# 5 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## 5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

### Εισαγωγή

Η δημιουργία των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στην προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων 3ου βαθμού. Αν στην  $ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = 0$  θέσουμε  $x = y - \frac{\beta}{3a}$  και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής  $x^3 = px + q$

Στις αρχές του 16ου αιώνα οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ όπου } D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2.$$

Στην περίπτωση που η "διακρίνουσα"  $D$  είναι θετική, ο τύπος αυτός δίνει αμέσως μια ρίζα της εξίσωσης. Για παράδειγμα, στην  $x^3 = 9x + 28$  είναι  $D = 169$  και ο τύπος δίνει  $x = 4$ , που είναι η μοναδική πραγματική ρίζα. Διαπιστώθηκε, όμως, τότε ένα φαινόμενο τελείως διαφορετικό από την περίπτωση των εξισώσεων 2ου βαθμού: Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως, για παράδειγμα, η  $x^3 = 15x + 4$  που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι  $-2 + \sqrt{3}$ ,  $-2 - \sqrt{3}$ ), αλλά η διακρίνουσα  $D$  είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (1)$$

Όπως είναι φανερό, οι μαθηματικοί βρέθηκαν, εδώ, μπροστά σε ένα δίλημμα: ή θα έπρεπε να εγκαταλείψουν τη μέθοδο των Ferro-Tartaglia ως γενική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων 3ου βαθμού ή να δεχτούν ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως το 4, μπορεί να εκφραστεί με παραστάσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Η δεύτερη άποψη φαινόταν αδιανόητη αλλά αυτό δεν εμπόδισε την εφαρμογή των αλγεβρικών πράξεων σε τέτοιες παραστάσεις. Στα μέσα του 16ου αιώνα ο R. Bombelli, κάνοντας τολμηρές υποθέσεις, βρήκε

ότι ισχύει  $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$  και  $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$ . Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (1) προκύπτει αμέσως ότι  $x=4$ , δηλαδή το αδιανόητο γίνεται πραγματικότητα! Οι αριθμοί της μορφής  $a+bi$  με  $i = \sqrt{-1}$  που ονομάστηκαν αρχικά φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε αναπόσπαστο εργαλείο των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους στις άλλες επιστήμες. Ο J. Hadamard, ο οποίος το 1896 απέδειξε με χρήση της μιγαδικής ανάλυσης το "θεώρημα των πρώτων αριθμών", έγραψε ότι:

"Ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών".



από το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την ασυνέχεια αυτή, διευρύνουμε το σύνολο  $\mathbf{R}$  σε ένα σύνολο  $\mathbf{C}$ , το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το  $\mathbf{R}$ , τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $x^2 = -1$  δηλαδή ένα στοιχείο  $i$ , τέτοιο, ώστε  $i^2 = -1$ . Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο  $\mathbf{C}$  θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Όλα τα στοιχεία της μορφής  $\beta i$ , που είναι γινόμενα των στοιχείων του  $\mathbf{R}$  με το  $i$  και
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής  $\alpha + \beta i$ , με  $\alpha$  και  $\beta$  πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του  $\mathbf{C}$  λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το  $\mathbf{C}$  σύνολο των **μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

Το σύνολο  $\mathbf{C}$  των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου  $\mathbf{R}$  των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, έτσι ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο  $\mathbf{R}$ , με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο  $i$ , τέτοιο, ώστε  $i^2 = -1$ ,
- Κάθε στοιχείο  $z$  του  $\mathbf{C}$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή  $z = \alpha + \beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

Η έκφραση  $\alpha + \beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  είναι ακριβώς ό,τι λέμε **μιγαδικό αριθμό**. Είναι η σύνθεση δύο αριθμών, του πραγματικού  $\alpha$  και του  $\beta i$ , τον οποίο ονομάζουμε **φανταστικό αριθμό**. Ο  $\alpha$  λέγεται **πραγματικό μέρος** του  $z$  και σημειώνεται  $\text{Re}(z)$ , ενώ ο  $\beta$  λέγεται **φανταστικό μέρος** του  $z$  και σημειώνεται  $\text{Im}(z)$ . Επιπλέον, στο  $\mathbf{C}$  κάθε πραγματικός αριθμός  $\alpha$  εκφράζεται ως  $\alpha + 0i$ , ενώ κάθε φανταστικός αριθμός  $\beta i$  εκφράζεται ως  $0 + \beta i$ . Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός  $z = \alpha + \beta i$ , εννοούμε ότι οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

### Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός  $z$  γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή  $\alpha + \beta i$ , δύο μιγαδικοί αριθμοί  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι ίσοι, αν και μόνο αν  $\alpha = \gamma$  και  $\beta = \delta$ , δηλαδή:

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta.$$

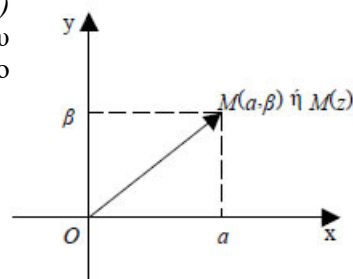
Επομένως,

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι κατά την επέκταση από το  $\mathbf{N}$  στο  $\mathbf{Z}$ , οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών, οι οποίες ισχύουν στο  $\mathbf{N}$  μεταφέρονται και στο  $\mathbf{Z}$ . Τα ίδια συμβαίνουν και για τις επεκτάσεις από το  $\mathbf{N}$  στο  $\mathbf{Q}$  και από το  $\mathbf{Q}$  στο  $\mathbf{R}$ . Στην επέκταση όμως από το  $\mathbf{R}$  στο  $\mathbf{C}$ , ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών, που ισχύουν στο  $\mathbf{R}$  εξακολουθούν να ισχύουν και στο  $\mathbf{C}$ , δε μεταφέρεται η διάταξη και οι ιδιότητές της.

### Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Σε κάθε μιγαδικό αριθμό  $\alpha + \beta i$  μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο  $M(\alpha, \beta)$  ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως, σε κάθε σημείο  $M(\alpha, \beta)$  του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το μιγαδικό  $\alpha + \beta i$ . Το σημείο  $M$  λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού  $\alpha + \beta i$ . Αν θέσουμε  $z = \alpha + \beta i$ , τότε το



σημείο  $M(\alpha, \beta)$  μπορούμε να το συμβολίζουμε και με  $M(z)$ .



Ένας μιγαδικός  $z = \alpha + \beta i$  παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα  $\vec{OM}$  του σημείου  $M(\alpha, \beta)$ .